

关于 Smarandache 函数的奇偶性

熊文井

(陕西教育学院数理系, 陕西 西安 710061)

摘要: 对任意正整数 n , 著名的 F.Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n \mid m!$. 即就是 $S(n) = \min\{m : m \in \mathbb{N}, n \mid m!\}$. 令 $OS(n)$ 表示区间 $[1, n]$ 中 $S(n)$ 为奇数的正整数 n 的个数; $ES(n)$ 表示区间 $[1, n]$ 中 $S(n)$ 为偶数的正整数 n 的个数. 在文 [2] 中, Kenichiro Kashihara 建议我们研究极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ES(n)}{OS(n)}$ 的存在问题. 如果存在, 确定其极限. 本文的主要目的是利用初等方法研究这一问题, 并得到彻底解决! 即就是证明该极限存在且为零.

关键词: Smarandache 函数; 奇偶性; 极限

中图分类号: O156.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 1008-5513(2008)02-0363-04

1 引言及结论

对任意正整数 n , 我们定义算术函数 $S(n)$ 为最小的正整数 m 使得 $n \mid m!$. 即就是 $S(n) = \min\{m : m \in \mathbb{N}, n \mid m!\}$. 这一函数是美籍罗马尼亚著名数论专家 Smarandache 教授在他所著的书中引入的 [1], 并建议人们研究它的性质! 从 $S(n)$ 的定义人们容易推出如果 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ 表示 n 的标准分解式, 那么 $S(n) = \max_{1 \leq i \leq r} \{S(p_i^{\alpha_i})\}$. 由此我们也不难计算出 $S(n)$ 的前几个值为: $S(1) = 1, S(2) = 2, S(3) = 3, S(4) = 4, S(5) = 5, S(6) = 3, S(7) = 7, S(8) = 4, S(9) = 6, S(10) = 5, S(11) = 11, S(12) = 4, S(13) = 13, S(14) = 7, S(15) = 5, S(16) = 6, \dots$. 关于 $S(n)$ 的算术性质, 许多学者进行了研究, 获得了不少有趣的结果 [3-6, 9-10]. 例如, 文 [3] 研究了一类包含 $S(n)$ 方程的可解性, 证明了该方程有无穷多组正整数解. 即就是证明了对任意正整数 $k \geq 2$, 方程

$$S(m_1 + m_2 + \cdots + m_k) = S(m_1) + S(m_2) + \cdots + S(m_k)$$

有无穷多组正整数解 (m_1, m_2, \dots, m_k) .

文 [4] 进一步证明对任意正整数 $k \geq 2$, 存在无穷多组正整数 (m_1, m_2, \dots, m_k) 满足不等式

$$S(m_1 + m_2 + \cdots + m_k) > S(m_1) + S(m_2) + \cdots + S(m_k)$$

同时, 又存在存在无穷多组正整数 (m_1, m_2, \dots, m_k) 满足不等式

$$S(m_1 + m_2 + \cdots + m_k) < S(m_1) + S(m_2) + \cdots + S(m_k)$$

收稿日期: 2007-11-02.

基金项目: 国家自然科学基金 (10671155).

作者简介: 熊文井 (1967-), 讲师, 研究方向: 基础数学的教学与研究.

此外, 文 [5] 获得了有关 $S(n)$ 的一个深刻结果! 也就是证明了渐近公式

$$\sum_{n \leq x} (S(n) - P(n))^2 = \frac{2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right)$$

其中 $P(n)$ 表示 n 的最大素因子, $\zeta(s)$ 表示 Riemann zeta- 函数.

现在我们令 $OS(n)$ 表示区间 $[1, n]$ 中 $S(n)$ 为奇数的正整数 n 的个数; $ES(n)$ 表示区间 $[1, n]$ 中 $S(n)$ 为偶数的正整数 n 的个数. 在文 [2] 中, Kenichiro Kashihara 提出了下面的问题

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ES(n)}{OS(n)}$$

是否存在? 如果存在, 确定其极限.

关于这一问题, 至今似乎没有人研究, 至少我们没有看到过有关方面的论文. 本文的主要目的是利用初等方法研究这一问题, 并得到彻底解决! 具体地说也就是证明了下面的:

定理 对任意正整数 $n > 1$, 我们有估计式

$$\frac{ES(n)}{OS(n)} = O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$$

显然这是一个比解决文 [2] 中问题更强的结论. 由此定理我们立刻得到下面的:

推论 对任意正整数 n , 我们有极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ES(n)}{OS(n)} = 0$$

2 定理的证明

这节我们利用初等方法给出定理的直接证明. 首先我们估计 $ES(n)$ 的上界. 事实上当 $n > 1$ 时, 设 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ 表示 n 的标准分解式, 那么由函数 $S(n)$ 的定义及性质可设 $S(n) = S(p_i^{\alpha_i}) = m \cdot p_i$. 若 $m = 1$, 那么 $S(n) = p_i$ 为奇数, 除非 $n = 2$. 令 $M = \ln n$, 于是我们有

$$ES(n) = \sum_{\substack{k \leq n \\ 2|S(k)}} 1 \leq 1 + \sum_{\substack{k \leq n \\ S(k)=S(p^\alpha), \alpha \geq 2}} 1 \leq 1 + \sum_{\substack{S(k) \leq M}} 1 + \sum_{\substack{kp^\alpha \leq n \\ \alpha p > M, \alpha \geq 2}} 1 \quad (1)$$

现在我们分别估计 (1) 式中的各项, 显然有

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{kp^\alpha \leq n \\ \alpha p > M, \alpha \geq 2}} 1 \leq \sum_{\substack{kp^2 \leq n \\ 2p > M}} 1 \leq \sum_{\substack{kp^\alpha \leq n \\ \alpha p > M, \alpha \geq 3}} 1 \leq \sum_{\substack{\frac{M}{2} < p \leq \sqrt{n}}} \sum_{\substack{k \leq \frac{n}{p^2}}} 1 + \sum_{\substack{p^\alpha \leq n \\ \alpha p > M, \alpha \geq 3}} \sum_{\substack{k \leq \frac{n}{p^\alpha}}} 1 \\ & \ll \sum_{\substack{\frac{M}{2} < p \leq \sqrt{n}}} \frac{n}{p^2} + \sum_{\substack{p^\alpha \leq n \\ \alpha p > M, \alpha \geq 3}} \frac{n}{p^\alpha} \ll \frac{n}{\ln n} + \sum_{\substack{p \leq \sqrt{n} \\ \alpha p > M, \alpha \geq p}} \frac{n}{p^\alpha} + \sum_{\substack{p \leq \sqrt{n} \\ \alpha p > M, 3 \leq \alpha < p}} \frac{n}{p^\alpha} \\ & \ll \frac{n}{\ln n} + \sum_{\substack{p \leq \sqrt{n} \\ \alpha > \sqrt{M}}} \frac{n}{p^\alpha} + \sum_{\substack{p \leq \sqrt{n} \\ p > \sqrt{M}, \alpha \geq 3}} \frac{n}{p^\alpha} \\ & \ll \frac{n}{\ln n} + \frac{n}{2^{\sqrt{M}-1}} + \frac{n}{M} \ll \frac{n}{\ln n} \end{aligned} \quad (2)$$

对于 (1) 式中的另一项, 我们需要采取新的估计方法. 对任意素数 $p \leq M$, 令 $\alpha(p) = \left[\frac{M}{p-1} \right]$, 即就是 $\alpha(p)$ 表示不超过 $\frac{M}{p-1}$ 的最大整数. 设 $u = \prod_{p \leq M} p^{\alpha(p)}$. 对任意满足 $S(k) \leq M$ 的正整数 k , 设 $S(k) = S(p^\alpha)$, 则由 $S(k)$ 的定义一定有 $p^\alpha | M!$, 从而

$$\alpha \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{M}{p^j} \right] \leq \frac{M}{p-1}$$

所以所有满足 $S(k) \leq M$ 的正整数 k 一定整除 u , 所有这样 k 的个数不会超过 u 的正因数的个数, 即就是 $d(u)$. 所以我们有

$$\begin{aligned} \sum_{S(k) \leq M} 1 &\leq \sum_{d|u} 1 = \prod_{p \leq M} (1 + \alpha(p)) = \prod_{p \leq M} \left(1 + \left[\frac{M}{p-1} \right] \right) \\ &= \exp \left(\sum_{p \leq M} \ln \left(1 + \left[\frac{M}{p-1} \right] \right) \right) \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $\exp(y) = e^y$.

由素数定理的两种形式 (参阅文 [7-8])

$$\pi(M) = \sum_{p \leq M} 1 = \frac{M}{\ln M} + O\left(\frac{M}{\ln^2 M}\right) \quad \text{及} \quad \sum_{p \leq M} \ln p = M + O\left(\frac{M}{\ln M}\right)$$

可得

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq M} \ln \left(1 + \left[\frac{M}{p-1} \right] \right) &\leq \sum_{p \leq M} \ln \left(1 + \frac{M}{p-1} \right) \\ &= \sum_{p \leq M} \left[\ln(p-1+M) - \ln p - \ln \left(1 - \frac{1}{p} \right) \right] \\ &\leq \pi(M) \cdot \ln(2M) - \sum_{p \leq M} \ln p + \sum_{p \leq M} \frac{1}{p} \\ &= \frac{M \cdot \ln(2M)}{\ln M} - M + O\left(\frac{M}{\ln M}\right) = O\left(\frac{M}{\ln M}\right) \end{aligned} \quad (4)$$

注意到 $M = \ln n$, 由 (3) 及 (4) 式立刻得到估计式

$$\sum_{S(k) \leq M} 1 \ll \exp \left(\frac{c \cdot \ln n}{\ln \ln n} \right) \quad (5)$$

其中 c 为一正常数.

注意到 $\exp \left(\frac{c \cdot \ln n}{\ln \ln n} \right) \ll \frac{n}{\ln n}$, 于是结合 (1), (2) 及 (5) 式立刻推出估计式:

$$ES(n) = \sum_{\substack{k \leq n \\ 2|S(k)}} 1 = O\left(\frac{n}{\ln n}\right)$$

显然 $OS(n) + ES(n) = n$, 所以由上式可得

$$OS(n) = n - ES(n) = n + O\left(\frac{n}{\ln n}\right)$$

从而

$$\frac{ES(n)}{OS(n)} = \frac{O\left(\frac{n}{\ln n}\right)}{n + O\left(\frac{n}{\ln n}\right)} = O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$$

于是完成了定理 2 的证明.

参 考 文 献

- [1] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.
- [2] Kenichiro Kashihara. Comments and Topics on Smarandache Notions and Problems [M]. USA: Erhus University Press, 1996.
- [3] Lu Yaming. On the solutions of an equation involving the Smarandache function [J]. Scientia Magna, 2006, 2(1): 76-79.
- [4] Jozsef Sandor. On a dual of the Pseudo-Smarandache function [J]. Smarandache Notions (Book series), 2002, 13: 16-23.
- [5] 徐哲峰. 关于 Smarandache 函数的值分布 [J]. Acta Mathematica Sinica, 2006, 49(5): 1009-1012.
- [6] Le Maohua. Two function equations [J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14: 180-182.
- [7] Tom M Apostol. Introduction to Analytic Number Theory [J]. New York: Springer-Verlag, 1976.
- [8] 张文鹏. 初等数论 [M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2007.
- [9] 杜凤英. 关于 Smarandache 函数 $S(n)$ 的一个猜想 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(2): 205-208.
- [10] 薛社教. 一个新的算术函数及其均值 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(3): 351-354.

On the parity of the Smarandache function

XIONG Wen-jing

(Department of Mathematics and Physics, Shaanxi Institute of Education, Xi'an 710061, China)

Abstract: For any positive integer n , the famous Smarandache function $S(n)$ is defined as the smallest positive integer m such that $n|m!$. That is, $S(n) = \min\{m : m \in \mathbb{N}, n|m!\}$. Let $OS(n)$ denotes the number of all n in the interval $[1, n]$ such that $2|S(n) + 1$; and $ES(n)$ denotes the number of all n in the interval $[1, n]$ such that $2|S(n)$. In reference [2], Kenichiro Kashihara asked us to determine the limit $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ES(n)}{OS(n)}$, if it exists, find its limit. In this paper, we solved this problem completely, and prove that its limit is zero.

Keywords: Smarandache function, properties, parity, limit

2000MSC: 11B83